

Mathematik

Uwe Gößner

23. März 2018

Dieses Dokument ist mit \LaTeX geschrieben.

1 Logik

Wir definieren w für wahr und f für falsch.

Die \neg stehen jeweils für eine Aussage.

\neg = Und

\vee = Oder

\neg = Nicht

\oplus = entweder Oder

$\uparrow \iff \neg \neg$ = nicht Und

\implies = wenn folgt (Implikation)

\iff = wenn folgt und umgedreht (Äquivalenz)

a	b	$a \neg b$	$a \vee b$	$\neg a$	$a \oplus b$	$a \uparrow b$	$a \implies b$	$a \iff b$
f	f	f	f	w	f	w	w	w
f	w	f	w	w	w	w	w	f
w	f	f	w	f	w	w	f	f
w	w	w	w	f	f	f	w	w

$.a \iff b / \iff ..a \implies b / \neg .b \implies a //$

$.\neg a \iff \neg b / \iff ..\neg a \implies \neg b / \neg .\neg b \implies \neg a //$

2 Mengenlehre

$:=$	ist definiert durch
A, B, C, ∇, Z	Mengen
\emptyset oder $\hat{}$	leere Menge
\in	ist Element von
\notin	ist nicht Element von
\cup	Vereinigungsmenge
\cap	Schnittmenge
\subset	echte Teilmenge von
\supset	echte Obermenge von
\subseteq	Teilmenge von
\supseteq	Obermenge von
$\hat{A} = \hat{B}$	Mengengleichheit
$\hat{A} \setminus \hat{B}$	Mengendifferenz
$\hat{A} \hat{\cdot} \hat{B}$	kartesisches Produkt
$.xy/$	geordnetes Paar
$.xyz/$	geordnetes Tripel
$.xyz \nabla/$	n-Tupel
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	2 dimensionaler Vektor
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	3 dimensionaler Vektor
$\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \triangle \end{pmatrix}$	n dimensionaler Vektor
$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$	2 $\hat{\cdot}$ 2 - Matrix
$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$	3 $\hat{\cdot}$ 3 - Matrix
$\begin{pmatrix} & & \nabla \\ & & \nabla \\ \triangle & \triangle & \vdots \end{pmatrix}$	$n \hat{\cdot} n$ - Matrix
$\begin{pmatrix} 11 & 12 & \nabla & 1n \\ 21 & 22 & \nabla & 2n \\ \triangle & \triangle & \vdots & \triangle \\ m1 & m2 & \nabla & mn \end{pmatrix}$	allgemeine Matrix

Seien $M_1 := \left| \begin{smallmatrix} x & x \\ x & x \end{smallmatrix} \ddot{E} M_1 \right|$ und $M_2 := \left| \begin{smallmatrix} x & x \\ x & x \end{smallmatrix} \ddot{E} M_2 \right|$ Mengen:

$$\begin{array}{llll}
M_1 = M_2 & \Longleftrightarrow & \begin{smallmatrix} \wedge x x \ddot{E} M_1 \acute{a} x \ddot{E} M_2 \end{smallmatrix} & \Longleftrightarrow x \ddot{E} M_1 \acute{a} M_2 \\
M_1 \ddot{a} M_2 & \Longleftrightarrow & \begin{smallmatrix} \wedge x x \ddot{E} M_1 \hat{a} x \ddot{E} M_2 \end{smallmatrix} & \Longleftrightarrow x \ddot{E} M_1 \hat{a} M_2 \\
M_1 \tilde{a} M_2 & \Longleftrightarrow & \begin{smallmatrix} \wedge x x \ddot{E} M_1 \acute{a} x \ddot{E} M_2 \end{smallmatrix} & \Longleftrightarrow x \ddot{E} M_1 \acute{a} M_2 \\
M_1 \setminus M_2 & \Longleftrightarrow & \begin{smallmatrix} \wedge x x \ddot{E} M_1 \acute{a} x \ddot{I} M_2 \end{smallmatrix} & \Longleftrightarrow x \ddot{E} M_1^X M_2 \\
& & & \Longleftrightarrow x \ddot{E} M_1 \Longrightarrow x \ddot{I} M_2 \\
M_1 \cap M_2 & \Longleftrightarrow & \begin{smallmatrix} \wedge x x \ddot{E} M_1 \acute{a} x \ddot{E} M_2 \acute{a} x \ddot{E} M_2 \acute{a} x \ddot{I} M_1 \end{smallmatrix} & \Longrightarrow x \ddot{E} M_1 \acute{a} M_2 \\
& & & \Longrightarrow x \ddot{E} M_2 \setminus M_1 \\
M_1 \cup M_2 & \Longleftrightarrow & \begin{smallmatrix} \wedge x x \ddot{E} M_1 \acute{a} x \ddot{E} M_2 \acute{a} x \ddot{E} M_2 \acute{a} x \ddot{I} M_1 \hat{a} x \ddot{E} M_2 \acute{a} x \ddot{E} M_1 \end{smallmatrix} & \Longrightarrow x \ddot{E} M_1 \acute{a} M_2 \\
& & & \Longrightarrow x \ddot{E} M_2 \setminus M_1 \\
& & & \Longrightarrow x \ddot{E} M_2 \acute{a} M_1 / \\
M_1 \cap M_2 & \Longleftrightarrow & \begin{smallmatrix} \wedge x x \ddot{E} M_1 \acute{a} x \ddot{I} M_2 \acute{a} x \ddot{E} M_1 \acute{a} x \ddot{E} M_2 \end{smallmatrix} & \Longrightarrow x \ddot{E} M_2 \acute{a} M_1 \\
& & & \Longrightarrow x \ddot{E} M_2 \acute{a} M_1 \\
M_1 \cap M_2 & \Longleftrightarrow & \begin{smallmatrix} \wedge x x \ddot{E} M_1 \acute{a} x \ddot{I} M_2 \acute{a} x \ddot{E} M_1 \acute{a} x \ddot{E} M_2 \hat{a} x \ddot{E} M_2 \acute{a} x \ddot{E} M_1 \end{smallmatrix} & \Longrightarrow x \ddot{E} M_1 \setminus M_2 \\
& & & \Longrightarrow x \ddot{E} M_1 \acute{a} M_2 / \\
M_1 \dot{\cap} M_2 & \Longleftrightarrow & \left| \begin{smallmatrix} x & y \\ x & y \end{smallmatrix} \ddot{E} M_1 \acute{a} y \ddot{E} M_2 \right| &
\end{array}$$

2.1 Kommutativgesetz

$$\begin{aligned} M_1 = M_2 &\iff M_2 = M_1 \iff x \in M_1 \implies x \in M_2 \text{ á } x \in M_2 \implies x \in M_1 \\ &\iff x \in M_1 \implies x \in M_2 \text{ á } x \in M_2 \implies x \in M_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1 \dot{\cup} M_2 &\iff M_2 \dot{\cup} M_1 \iff x \in M_1 \hat{\wedge} x \in M_2 \iff x \in M_2 \hat{\wedge} x \in M_1 \\ &\iff x \in M_1 \hat{\wedge} x \in M_2 \implies x \in M_2 \hat{\wedge} x \in M_1 \\ &\iff x \in M_2 \hat{\wedge} x \in M_1 \implies x \in M_1 \hat{\wedge} x \in M_2 \\ &\iff x \in M_1 \hat{\wedge} x \in M_2 \iff x \in M_2 \hat{\wedge} x \in M_1 \\ &\iff x \in M_1 \hat{\wedge} x \in M_2 \implies x \in M_2 \hat{\wedge} x \in M_1 \\ &\iff x \in M_2 \hat{\wedge} x \in M_1 \implies x \in M_1 \hat{\wedge} x \in M_2 \\ &\iff x \in M_1 \implies x \in M_2 \iff x \in M_2 \implies x \in M_1 \\ &\iff .x \in M_1 \implies x \in M_2 / \implies .x \in M_2 \implies x \in M_1 / \\ &\iff .x \in M_2 \implies x \in M_1 / \implies .x \in M_1 \implies x \in M_2 / \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{\cup} M_2 &\iff M_2 \ddot{\cup} M_1 \iff x \in M_1 \text{ á } x \in M_2 \iff x \in M_2 \text{ á } x \in M_1 \\ &\iff x \in M_1 \text{ á } x \in M_2 \implies x \in M_2 \text{ á } x \in M_1 \\ &\iff x \in M_2 \text{ á } x \in M_1 \implies x \in M_1 \text{ á } x \in M_2 \\ &\iff x \in M_1 \text{ á } x \in M_2 \iff x \in M_2 \text{ á } x \in M_1 \\ &\iff x \in M_1 \text{ á } x \in M_2 \implies x \in M_2 \text{ á } x \in M_1 \\ &\iff x \in M_2 \text{ á } x \in M_1 \implies x \in M_1 \text{ á } x \in M_2 \\ &\iff x \in M_1 \implies x \in M_2 \iff x \in M_2 \implies x \in M_1 \\ &\iff .x \in M_1 \implies x \in M_2 / \implies .x \in M_2 \implies x \in M_1 / \\ &\iff .x \in M_2 \implies x \in M_1 / \implies .x \in M_1 \implies x \in M_2 / \end{aligned}$$

Die Ober- Teil- und Differenzmengen sind **nicht** kommutativ!

2.2 Assoziativgesetz

Um die Assoziativität der Mengen zeigen zu können brauchen wir eine dritte Menge $M_3 := |xx \in M_3|$:

$$\begin{aligned} M_1 \dot{\cup} .M_2 \dot{\cup} M_3 / &\iff .M_1 \dot{\cup} M_2 / \dot{\cup} M_3 \iff M_1 \dot{\cup} M_2 \dot{\cup} M_3 \\ M_1 \ddot{\cup} .M_2 \ddot{\cup} M_3 / &\iff .M_1 \ddot{\cup} M_2 / \ddot{\cup} M_3 \iff M_1 \ddot{\cup} M_2 \ddot{\cup} M_3 \end{aligned}$$

Die Ober- Teil- und Differenzmengen sind **nicht** assoziativ!

2.3 Distributivgesetz

$$\begin{aligned} M_1 \dot{\cup} .M_2 \ddot{\cup} M_3 / &\iff .M_1 \dot{\cup} M_2 / \ddot{\cup} .M_1 \dot{\cup} M_3 / \\ M_1 \ddot{\cup} .M_2 \dot{\cup} M_3 / &\iff .M_1 \ddot{\cup} M_2 / \dot{\cup} .M_1 \ddot{\cup} M_3 / \\ M_1 \setminus .M_2 \dot{\cup} M_3 / &\iff .M_1 \setminus M_2 / \dot{\cup} .M_1 \setminus M_3 / \\ M_1 \setminus .M_2 \ddot{\cup} M_3 / &\iff .M_1 \setminus M_2 / \ddot{\cup} .M_1 \setminus M_3 / \\ M_1 \dot{\cup} .M_2 \setminus M_3 / &\iff .M_1 \dot{\cup} M_2 / \setminus .M_1 \dot{\cup} M_3 / \\ M_1 \ddot{\cup} .M_2 \setminus M_3 / &\iff .M_1 \ddot{\cup} M_2 / \setminus .M_1 \ddot{\cup} M_3 / \end{aligned}$$

Die Ober- und Teilmengen sind **nicht** distributiv!

2.4 Mengen von Zahlen

Term.

$<$	=	kleiner als
\leq	=	kleiner oder gleich
$=$		ist gleich
\geq	=	größer oder gleich
$>$	=	größer als
∞	=	unendlich
\mathbb{N}		Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{N}^i		$\mathbb{N} \setminus \{0\}$
\mathbb{N}_0		$\mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{Z}		Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{Z}^i		$\mathbb{Z} \setminus \{0\}$
\mathbb{Z}^+		Menge der positiven ganzen Zahlen
\mathbb{Z}^*		Menge der negativen ganzen Zahlen
\mathbb{Z}_0		$\mathbb{Z} \cup \{0\}$
\mathbb{Z}_0^+		\mathbb{N}
\mathbb{Z}_0^*		$\mathbb{Z}^* \cup \{0\}$
\mathbb{Z}_+^i		$\mathbb{N}^i \Rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$
\mathbb{Z}_*^i		$\mathbb{Z}^* \setminus \{0\}$
\mathbb{Q}		Menge der rationalen Zahlen
\mathbb{J}		Menge der irrationalen Zahlen
\mathbb{R}		Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^+		Menge der positiven reellen Zahlen
\mathbb{R}^*		Menge der negativen reellen Zahlen
\mathbb{R}_0		$\mathbb{R} \cup \{0\}$
\mathbb{R}_0^+		$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
\mathbb{R}_0^*		$\mathbb{R}^* \cup \{0\}$
\mathbb{C}		Menge der komplexen Zahlen

2.4.1 Die Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N}

$$\mathbb{N} := \{x \mid 0 \leq x < \infty\}$$

Alles hat mal mit dem zählen von Zahlen angefangen (eins, zwei, drei, ∇).

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{x \mid 0 < x < \infty\}$.

Später hat man dann auch gemerkt, das es auch nichts geben kann. Die Null 0 .

Wir fügen also die Null noch zu der Menge der natürlichen Zahlen hinzu. $\mathbb{N}_0 := \{x \mid 0 \leq x < \infty\}$.

Jetzt können wir die Zahlen addieren.

Zuerst müssen wir die Menge der natürlichen Zahlen richtig definieren.

$\mathbb{N} \setminus \{0\} =: \mathbb{N}^+$ und mit 0 dann \mathbb{N} .

Dann können wir

b mal

$$a + b = c \cdot a + 0 = a \cdot 0 + a = a \cdot a \odot b = a + a + \nabla = c \cdot a \odot 1 = a \cdot 1 \odot a = a \cdot a \odot 0 = 0 \cdot a \odot a = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{N}$ bestimmen.

Die 0 ist das neutrale Element der Addition und die 1 ist das neutrale Element der Multiplikation.

Die Subtraktion funktioniert vorerst nur mit Einschränkung die da wären bei $a * b = c$ mit $a, b, c \in \mathbb{N}$ $a \geq b$.

Für $a * b = c$ mit $a, b, c \in \mathbb{N}$ $a < b$ müssen wir eine Zahlenerweiterung vornehmen.

2.4.2 Die Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z}

$$\mathbb{Z} := \{x \mid x * \infty < x < \infty\}$$

Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} := \{x \mid x * \infty < x < \infty\}$ \mathbb{Z} erlaubt es uns so etwas wie $a * b = c$ mit $a, b \in \mathbb{Z}^+$ $a < b$ $c \in \mathbb{Z}^*$ zu rechnen.

Für jedes beliebige a gibt es ein negatives $*a \in \mathbb{Z}$.

Die Division funktioniert vorerst nur mit Einschränkung $a \bmod b = 0$.

2.4.3 Die Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q}

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ \& } q \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

Ab hier funktioniert die Division **fast** uneingeschränkt $a \bmod b = 0 / a \bmod b \neq 0$.

Aber auch die Menge der rationalen Zahlen hat ihr Tücken

2.4.4 Die Menge der irrationalen Zahlen \mathbb{J}

$$\mathbb{J} := \left\{ a \in \mathbb{R} \mid a \notin \mathbb{Q} \right\}$$

2.4.5 Die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R}

$$\mathbb{R} := \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ \& } x \in \mathbb{J}\}$$

3 Rechengesetze

+	=	plus
*	=	minus
\odot	=	mal
\S	=	geteilt durch
:	=	geteilt durch
	=	geteilt durch
	=	Potenz
ln	=	natürlicher Logarythmus
log	=	Logarythmus zur Basis 10
$\log_b a$	=	Logarythmus a zur Basis b
e	=	e -Funktion
$\sqrt{\quad}$	=	Wurzel
$\sqrt[n]{\quad}$	=	n-te Wurzel
mod	=	Rest einer Division
	=	Betrag einer Zahl * =

3.1 Addition

$$a + b = c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$a + 0 = a \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

3.2 Subtraktion

$$a - b = c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

3.3 Multiplikation

$$a \odot b = ab = c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$a \odot 1 = a \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

$$a \odot 0 = 0 \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

3.4 Multiplikation (Besonderheit)

$$a^b = \underbrace{a \odot a \odot a \odot \dots}_{b \text{ mal}} \text{ mit } a \in \mathbb{R} \text{ á } b \in \mathbb{N}$$

3.5 Division

$$a \S b = \frac{p}{q} = c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ á } p \in \mathbb{Z} \text{ á } b, q \in \mathbb{Z}^{!1}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} = d \text{ mit } a, c \in \mathbb{Z} \text{ á } b \in \mathbb{Z}^{!} \text{ á } d \in \mathbb{R}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd} = e \text{ mit } a, c \in \mathbb{Z} \text{ á } b, d \in \mathbb{Z}^{!} \text{ á } e \in \mathbb{R}$$

¹Die Division durch 0 ist nicht definiert

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{b} = \frac{a * c}{b} = d \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ á } b \in \mathbb{Z}^i \text{ á } d \in \mathbb{R}$$

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} * \frac{cb}{bd} = \frac{ad * cb}{bd} = e \text{ mit } a, c \in \mathbb{Z} \text{ á } b, d \in \mathbb{Z}^i \text{ á } e \in \mathbb{R}$$

3.6 Kommutativgesetze

$$a + b = b + a = c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$a + 0 = 0 + a = a \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

Die Subtraktion ist **nicht** kommutativ!

$$a \odot b = ab = b \odot a = ba = c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Die Division ist ebenfalls **nicht** kommutativ!

3.7 Assoziativgesetze

$$a + .b + c/ = .a + b/ + c = d \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Die Subtraktion ist **nicht** assoziativ!

$$a \odot .b \odot c/ = .a \odot b/ \odot c = d \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Die Division ist ebenfalls **nicht** assoziativ!

3.8 Distributivgesetze

$$a \odot .b + c/ = a \odot b + a \odot c = d \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$a \odot .b * c/ = a \odot b * a \odot c = d \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$.a + b/ \odot c = a \odot c + b \odot c = d \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$.a * b/ \odot c = a \odot c * b \odot c = d \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Die Distributivität der Division funktioniert nur in eine Richtung!

$$.a + b/ \S c = a \S c + b \S c = d \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$.a * b/ \S c = a \S c * b \S c = d \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

3.9 Potenzgesetze

b mal

$$a^b = a \odot a \odot a \nabla = c \text{ mit } a \text{ als Basis, } b \text{ der Exponent und } c \text{ die Potenz; } a, c \in \mathbb{R} \text{ á } b \in \mathbb{N}$$

$$a^{*b} = \frac{1}{a^b} = c \text{ mit } a \in \mathbb{R}^i \text{ á } b \in \mathbb{N} \text{ á } c \in \mathbb{R}$$

$$a^b \odot a^c = a^{b+c} = d \text{ mit } a, d \in \mathbb{R} \text{ á } b, c \in \mathbb{Z}$$

$$a^c \odot b^c = a \odot b^c = d \text{ mit } a, b, d \in \mathbb{R} \text{ á } c \in \mathbb{Z}$$

$$a \odot b^c \odot d \odot b^e = a \odot d \odot b^{c+e} = f \text{ mit } a, b, d, f \in \mathbb{R} \text{ á } c, e \in \mathbb{Z}$$

$$(a^b)^c = a^{b \odot c} = d \text{ mit } a, d \in \mathbb{R} \text{ á } b, c \in \mathbb{Z}$$

3.10 Logarythmusgesetze

$$\log_b a + c = \log_b a \odot \log_b c \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}$$

$$\log_b a * c = \frac{\log_b a}{\log_b c} \text{ mit } a, c \in \mathbb{R} \text{ \´ } b \in \mathbb{N}^2 \text{ \´ } \log_b c \neq 0$$

Beim nat\u00fcrlichen Logarythmus funktioniert das **nicht!**

4 binomische Formeln und deren Herleitung

$$\begin{aligned} .a + b/^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &= .a + b/.a + b/ \\ &= a.a + b/ + b.a + b/ \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} .a * b/^2 &= a^2 * 2ab + b^2 \\ &= .a * b/.a * b/ \\ &= a.a * b/ * b.a * b/ \\ &= a^2 * ab * ab + b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} .a + b/.a * b/ &= a^2 * b^2 \\ &= a.a * b/ + b.a * b/ \\ &= a^2 * ab + ab * b^2 \end{aligned}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$

²Die Basis darf nicht ≤ 0 sein

5 quadtratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 + px = {}^*q$$

$$x^2 + \frac{2px}{2} + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} {}^*q \quad \text{quadratische Ergänzung} \quad .a + b/2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} {}^*q \quad \sqrt{\cdot}/$$

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} {}^*q} \quad {}^*\frac{p}{2}$$

$$x_{1,2} = {}^*\frac{p}{2}, \sqrt{\frac{p^2}{4} {}^*q}$$

$$x_1 = {}^*\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} {}^*q}$$

$$x_2 = {}^*\frac{p}{2} {}^*\sqrt{\frac{p^2}{4} {}^*q}$$

$$x_1 + x_2 = \left({}^*\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} {}^*q}\right) + \left({}^*\frac{p}{2} {}^*\sqrt{\frac{p^2}{4} {}^*q}\right)$$

$$x_1 + x_2 = {}^*\frac{p}{2} + \cancel{\sqrt{\frac{p^2}{4} {}^*q}} {}^*\frac{p}{2} {}^*\cancel{\sqrt{\frac{p^2}{4} {}^*q}}$$

$$x_1 + x_2 = {}^*\frac{2p}{2}$$

$$x_1 + x_2 = {}^*p$$

$$p = {}^*x_1 {}^*x_2$$