1 Matrixalgebra

In vielen Feldern der Volkswirtschaftslehre spielen lineare Gleichungssysteme eine wichtige Rolle. Insbesonders in der Ökonometrie wird häufig eine Notation in Form von Vektoren und Matrizen verwendet. Deshalb ist für ein erfolgreiches Studium ein gutes Verständnis der Matrixalgebra äußerst hilfreich. Im Folgenden wollen wir dazu einige Konzepte der linearen Algebra, das Rechnen mit Vektoren und Matrizen, verstehen lernen und üben.

Eine Matrix ist dabei zunächst nicht viel mehr als eine rechteckige Anordnung von Zahlen oder Variablen. Man spricht dabei von einer N x K (Sprich: N-Kreuz-K) Matrix. Das N repräsentiert dabei die Zahl der Zeilen einer Matrix, das K steht für die Anzahl der Spalten. Man sagt auch: Eine Matrix besitzt die *Ordnung* oder *Dimension* N x K. Ein Vektor entspricht einer Matrix mit nur einer Spalte oder Zeile und ist somit nichts weiter als eine Sonderform der Matrix, wie später noch ausführlicher erläutert wird.

In der Mathematik wird eine Matrix (hier eine 3 x 3-Matrix) folgendermaßen notiert:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{M}$ bezeichnet dabei die gesamte Matrix. Die Werte m_{ij} stehen für ihre jeweiligen *Elemente* in der i-ten Zeile und j-ten Spalte. Das Element m_{23} steht dabei beispielsweise für das Element in der zweiten Zeile und der dritten Spalte obiger Matrix. Die Buchstaben i und j sind dabei typisch verwendete Zählindikatoren, wobei mit i eine beliebige Zeile einer Matrix und mit j eine beliebige Spalte bezeichnet wird.

Es ist eine Konvention das Matrizen mit fettgedruckten Großbuchstaben, Vektoren mit fettgedruckten Kleinbuchstaben gekennzeichnet werden. Die Notation mit einem Pfeil über dem Buchstaben, wie sie vielen sicherlich aus dem Schulunterricht noch bekannt ist, wird in wissenschaftlichen Aufsätzen und in Lehrbüchern hingegen kaum verwendet.

1.1 Rechnen mit Matrizen

1.1.1 Addition und Subtraktion

Um eine Addition oder Subtraktion zweier Matrizen durchzuführen ist es zwingend erforderlich, dass diese die gleiche Dimension besitzen. Eine Matrix der Dimension 3 x 3 kann beispielsweise nur mit einer Matrix addiert werden, die ebenfalls die Dimension 3 x 3 besitzt. Dabei werden jeweils die Elemente addiert, die sich in beiden Matrizen an gleicher Zeilen- und Spaltenposition befinden. Ausgehend von zwei 3 x 3-Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 19 & 8 & 12 \\ 8 & 117 & 12 \\ -4 & 12 & 37 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 24 & 5 & 50 \\ 19 & 2 & 34 \\ 109 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 19 & 8 & 12 \\ 8 & 117 & 12 \\ -4 & 12 & 37 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 & 5 & 50 \\ 19 & 2 & 34 \\ 109 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19+24 & 8+5 & 12+50 \\ 8+19 & 117+2 & 12+34 \\ -4+109 & 12+0 & 37+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 13 & 62 \\ 27 & 119 & 46 \\ 105 & 12 & 36 \end{pmatrix}$$

Die Subtraktion funktioniert nach dem gleichen Prinzip, nur dass hierbei die jeweiligen Elemente der zwei Matrizen voneinander subtrahiert werden:

$$\mathbf{A}-\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 19 & 8 & 12 \\ 8 & 117 & 12 \\ -4 & 12 & 37 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 & 5 & 50 \\ 19 & 2 & 34 \\ 109 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19-24 & 8-5 & 12-50 \\ 8-19 & 117-2 & 12-34 \\ -4-109 & 12-0 & 37-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -38 \\ -11 & 115 & -22 \\ -113 & 12 & 38 \end{pmatrix}$$

Durch das Verrechnen der beiden Matrizen entsteht dabei wieder eine Matrix mit selber Dimension N x K der beiden Ausgangsmatrizen. Bei Betrachten des Ergebnisses fällt auch sogleich ins Auge, warum nur Matrizen mit den gleichen Dimensionen verrechnet werden können: Andernfalls wäre eine Addition oder Subtraktion der jeweiligen Elemente nicht möglich - das Ergebnis einer solchen Rechnung ist daher nicht definiert.

1.1.2 Matrizen-Multipikation

Ein wenig anders funktioniert die Multiplikation zweier Matrizen. Im Unterschied zur Addition oder Subtraktion ist es nun nicht mehr notwendig, dass diese die gleiche Dimension besitzen. Im Gegensatz ist es erforderlich, dass die Zahl der Spalten in der Matrix **A** (Dimension: N_A x K_A) der Zahl der Zeilen in Matrix **B** (Dimension: N_B x K_B) entspricht. Dagegen muss gelten, dass $K_A = N_B$, also dass wie erläutert die Zahl der Spalten in Matrix **A** der Zahl der Zeilen in Matrix **B** entspricht. Die Ergebnissmatrix besitzt anschließend gleiche Dimension N_B x K_A der Ausgangsmatrizen. Die Werte von N_A und K_B sind für die Durchführbarkeit einer solchen Multiplikation dagegen irrelvant.

Die Funktionsweise einer Multiplikation sei an einem einfachen Beispiel veranschaulicht. Wir verwenden dabei wieder gleiche Matizen **A** und **B** wie zuvor. Da es sich um zwei 3 x 3-Matrizen handelt ist die Bedingung $K_A = N_B$ mit $3 = 3$ erfüllt. Im Ergebniss wollen wir eine Matrix **C** berechnen.

$$C = A \cdot B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Dabei berechnet sich ein Element c_{ij} **nicht** durch Multiplikation der Elemente a_{ij} und b_{ij}. Um ein Element c_{ij} zu berechnen multiplizieren wir statt dessen jedes Element der i-ten Zeile von A mit dem entsprechenden Element der j-ten Spalte von B und addieren dann alle Produkte auf.

Intuitiver ist dies an unserem Beispiel erläutert. Wir betrachten dabei zunächst die allgemeine Form der Matrizen und berechnen erst im Anschluss die Ergebnisse mit den eigentlichen Zahlen.

Für die Berechnung des Elements c_{21} betrachten wir beispielsweise alle Elemente aus der zweiten Spalte der Matrix **A** und alle Elemente aus der ersten Zeile der Matrix **B**. Wir erhalten dadurch zwei "‘Reihen"‘ mit jeweils drei Elementen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Diese sind a_{21}, a_{22} und a_{23} für die Matrix **A**. Für die Matrix **B** erhalten wir (geordnet von oben nach unten) die Elemente b_{11}, b_{12} und b_{13}. Um nun unser Ergebnis zu berechnen multiplizieren wir die Elemente an den jeweils gleichen Positionen unserer beiden "’Reihen"‘ miteinander und addieren die dadurch erhaltenen Ergebnisse. c_{21} entspricht also $a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{13}$.

Mit den tatsächlichen Werten erhalten wir die "’Reihen"‘ *8*, *117* und *12* aus der Matrix **A**. Aus **B** erhalten wir *24*, *19* und *109*. Für c_{21} erhalten wir damit: $8 \cdot 24 + 117 \cdot 19 + 12 \cdot 109 = 192 + 2.223 + 1.308 = 3.723$

In einer allgemeinen Form lässt sich jedes Element c_{ij} einer Matrix **C** folgendermaßen definieren:

$$c_{ij} = \sum_{q=1}^{Q} a_{iq} \cdot b_{qj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{iQ} \cdot b_{Qj}$$

Um solche Matrizenmultiplikationen im Studienalltag schneller durchführen zu können, gibt es einen einfachen grafischen Trick, um schnell und einfach zu einem Ergebnis zu kommen. Man schreibt, wie untenstehend veranschaulich, die Matrix **A** links neben die Ergebnismatrix und setzt die Matrix **B** darüber.

$$\begin{pmatrix} 19 & 8 & 12 \\ 8 & 117 & 12 \\ -4 & 12 & 37 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & 5 & 50 \\ 19 & 2 & 34 \\ 109 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1916 & 111 & 1210 \\ 3723 & 274 & 4366 \\ 4165 & 4 & 171 \end{pmatrix}$$